ESTIMATING DIMENSION OF STATE SPACE ATTRACTORS

Tomáš Götthans
Bachelor Degree Programme (3), FEEC BUT
E-mail: xgotth00@stud.feec.vutbr.cz

Supervised by: Jiří Petržela
E-mail: petrzelj@feec.vutbr.cz

ABSTRACT

The geometry of chaotic attractors can be complex and difficult to describe without some mathematical tool. The topic of this contribution is the realization of program for computing the dimensions of state space attractors. We can also find out if the system is highly sensitive to initial conditions. First we need to numerically integrate system of equations, create a data set and finally we can estimate the capacity or Kaplan-Yorke dimension. The main objective of derived program is to analyze and determine chaotic behavior providing a chance to discuss the accuracy of computation engine and theoretical value.

1. ÚVOD

Teorie chaosu se zabývá chováním nelineárních dynamických systémů alespoň třetího řádu, které při jistých počátečních podmínkách a parametrech vykazují jev známý jako chaos, nejvýznamněji charakterizovaný citlivostí na počáteční podmínky. V důsledku této vlastnosti se chování těchto fyzikálních systémů jeví jako náhodné, i když model systému je deterministický a neobsahuje tedy žádné náhodné parametry. Příklady takových systémů zahrnují atmosféru, solární systém, tektoniku zemských desek, turbulenci tekutin, ekonomii, vývoj populace. V systémech vykazujících chaotické řešení se při volbě minimálně dvou nekonečně blízkých počátečních bodů tyto dva body exponenciálně vzdalují, a to při zachování ohraničeného řešení systému. Toho je dosaženo zakřivením vektorového prostoru. Budoucí stav systému není tedy možné žádným způsobem předpovědět.

2. DIMENZE

Pro "běžné" útvary vyskytující se v okolním světě si vystačíme s dimenzemi 0, 1, 2 nebo 3. Proto bylo poměrně velkým překvapením, když byly objeveny zvláštní geometrické útvary, pro které toto rozdělení na celočíselné dimenze není dostatečné.

2.1. EUKLIDOVSKÁ DIMENZE

Euklidovská dimenze je dimenze známá z klasické geometrie. Její hodnota pro dané těleso udává, jaký je minimální počet údajů pro popis polohy bodu náležícího tělesu. Například změříme li délku tělesa, která se dá popsat úsečkou, měříme v jedné dimenzi. Dále si můžeme představit hřiště. K jeho základnímu geometrickému popisu používáme délku a šířku. To znamená, že již měříme ve dvojdimenzionálním prostoru.

2.2. TOPOLOGICKÁ DIMENZE

Topologická dimenze tělesa se určuje jako 1+ Euklidovská dimenze nejjednoduššího tělesa, které dokáže rozdělit dané těleso na řadu menších těles. Topologická dimenze je vždy celé číslo a obvykle má stejnou hodnotu jako Euklidovská dimenze.

2.3. HAUSDORFFOVA DIMENZE

Dimenzi fraktálních objektů nazýváme fraktální dimenzí či Hausdorffovou dimenzí, nebo se také nazývá objemová (krychlová) dimenze. Hodnota této dimenze (resp. míra rozdílu mezi fraktální dimenzí a dimenzí topologickou) potom udává úroveň členitosti daného objektu.

3. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

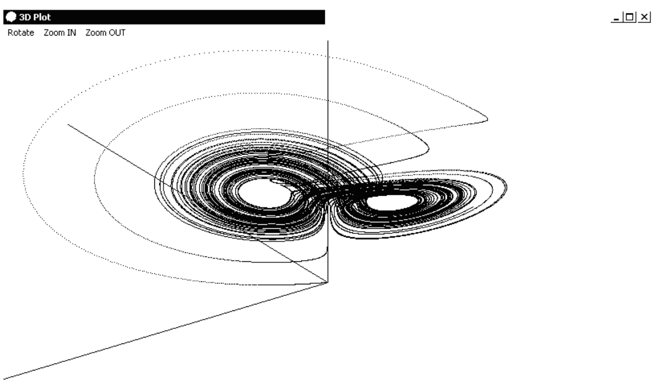
V našem případě se budeme zabývat řešením diferenciálních rovnic v maticovém zápisu:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

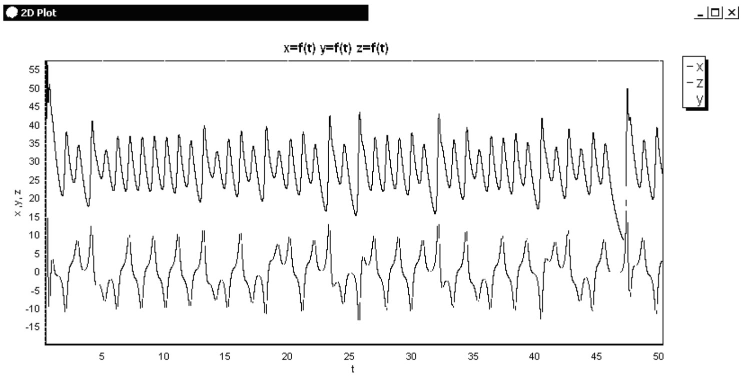
Jedná se o nelineární rovnice, které v určitých případech vykazují chaotické chování. Je patrné, že složitost pro analytické řešení je veliká. Pro řešení vybereme Eulerovu numerickou metodu (porovnal jsem i přesnost s Runge-Kuttovou metodou), která je relativně snadná pro počítačové zpracování a její chyba je přijatelná.

4. PROGRAMOVÁ REALIZACE



Obrázek 1: Screenshot - 3D vizualizace

Program je napsán pro operační systém Microsoft Windows v jazyce C++ Builder 6.0, numericky integruje systém 3 diferenciálních rovnic, pracuje se vstupními daty uloženými v souborech, ukládá do souboru a vizualizuje data pomocí grafických knihoven OpenGL a TChart. Dále program počítá hodnotu dimenze pomocí mřížkové metody. Dále jsem vytvořil program v jazyce MATLAB, který počítá hodnoty ortogonalizuje soustavu pomocí Gram-Schmidtových algoritmů. Dále počítá hodnoty jednorozměrných Lyapunových exponentů, ze kterých určí pomocí Kaplan-Yorkeho metody dimenzi.



Obrázek 2: Screenshot - 2D vizualizace

4.1. DOSAŽENÉ VÝSLEDKY

Pro ukázku přesnosti výpočtů dimenze jednotlivými metodami jsem si vybral Lorenzův atraktor (obrázek 1.)

Metoda	Dimenze
Mřížková metoda	1,950
Kaplan-Yorkeho metoda	2,055
Teoretická hodnota	2,060

Tabulka 1: Porovnání dosažených výsledků.

5. ZÁVĚR

O chaotických signálech se dnes mluví stále více téměř ve všech odvětvích vědy. V komunikačních systémech se často používá například modulace chaotickým signálem. V biomedicíně se tento pojem zavádí v souvislosti se signály EEG. Při znalosti nekonečné přesnosti počátečních podmínek se tedy chování systému dá předpovídat s nekonečnou přesností. V úvahu však musíme vzít Heisenbergův princip neurčitosti.

LITERATURA

[1] WYK, M. A., STEEB, W. H. Chaos in electronics. Kluwer Academic Publishers 1997, ISBN 0-7923-4576-2.

[2] Falconer K., Fractal Geometry Mathematical Foundations & Applications. John Wiley & Sons Ltd., 1990

[3] Williams G., Chaos Theory Tamed. Joseph Henry Press. 1997

[4] Kapitaniak T. a Bishop S., The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and chaos. John Wiley & Sons Ltd., 1999

[5] Fajmon B. a Růžičková I., Matematika 3, Skripta FEKT VUT v Brně, 2005